Chapter 6. Stability

Things to know

- The stability of a system represented as a transfer function
- The stability of a system represented in state space
- Determining system parameters to yield stability

Chapter 6. Stability

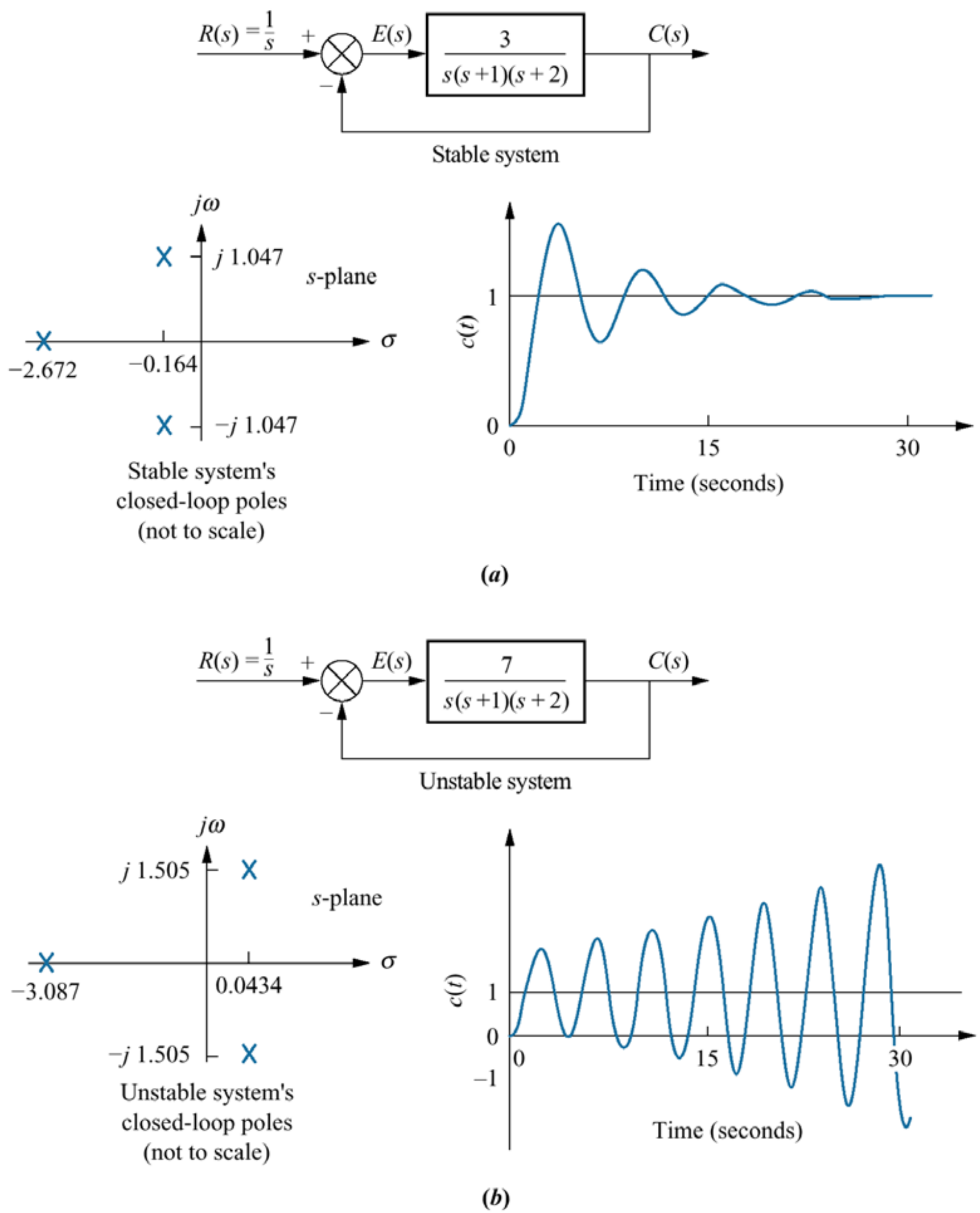


Figure 6.1
Closed-loop poles
and response:
a. stable system;
b. unstable system

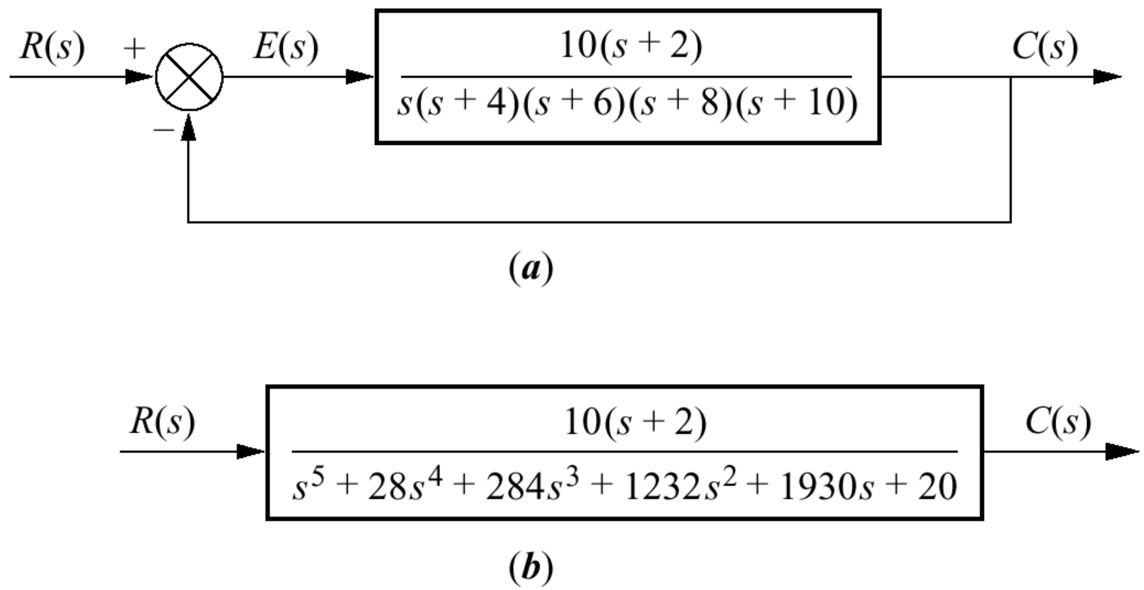
Control Systems Engineering, 7th Edition

Norman S. Nise, California State Polytechnic University

Antenna (Ch. 6)

http://www.wiley.com/college/nise/0471794759/swf/AntenaChap6.swf

Figure 6.2
Common cause of problems in finding closed-loop poles:
a. original system;
b. equivalent system



1. *Routh, E. J. (1877). A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion. Macmillan.*
2. *Hurwitz, A. (1895). "Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt". Math. Ann. 46 (2): 273–284. doi:10.1007/BF01446812.* (English translation “On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts” by H. G. Bergmann in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory* R. Bellman and R. Kalaba Eds. New York: Dover, 1964 pp. 70–82.)

◆ Routh-Hurwitz Stability Criterion

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

1) 우선 시스템이 안정하기 위한 필요조건인 특성방정식의 모든 계수 $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots,\ a_0$ 가 같은 부호인지를 조사한다.

2) Routh 배열을 정리해 배열의 첫 번째 열의 모든 계수가 같은 부호가 되어야 시스템이 안정하다는 필요충분조건을 만족

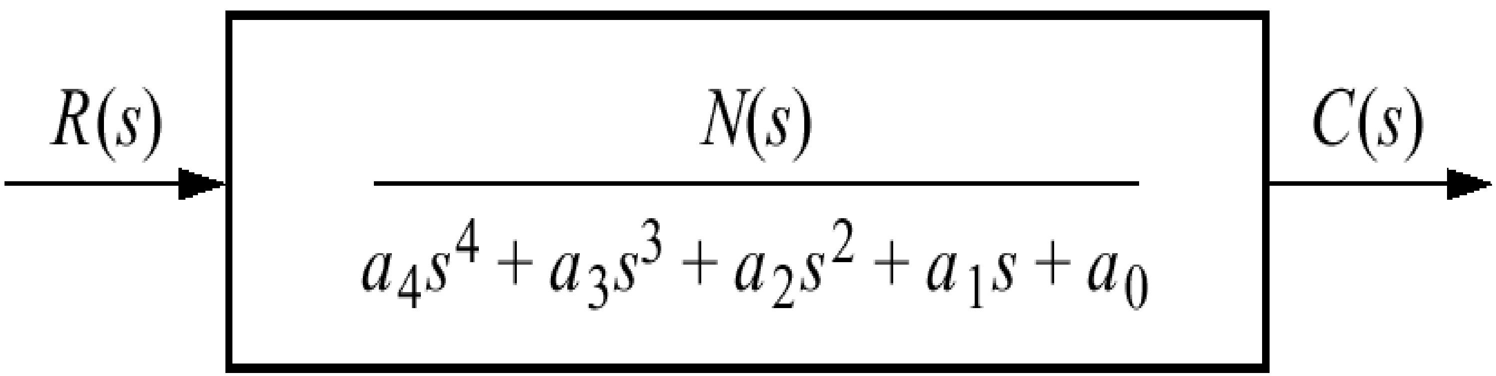


Figure 6.3 Equivalent closed-loop transfer function

특성방정식의 계수 $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ldots,\ a_0$ 에 대한 Routh table

1행	a_n	a_{n-2}	$a_{n-4}\cdots$
2행	a_{n-1}	a_{n-3}	$a_{n-5}\cdots$
3행	b_1	b_2	$b_3\cdots$

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$b_m = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2m} \\ a_{n-1} & a_{n-2m-1} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-2m} - a_n a_{n-2m-1}}{a_{n-1}}$$

이와 같이 b_1, b_2, b_3, …를 계산하여 이것을 3행으로 한다.

1행	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…
2행	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…
3행	b_1	b_2	b_3	…

이 배열의 2행과 3행으로부터

$$c_1 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{a_{n-3}b_1 - a_{n-1}b_2}{b_1}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{a_{n-5}b_1 - a_{n-1}b_3}{b_1}$$

$$\vdots$$

이와 같은 방법으로 새로운 행을 계속 만들어 나가다 새로 만들어진 행의 전부가 0이 될 때까지 일반적으로 n+1행까지 계산하여 다음과 같은 Routh 배열을 만든다.

Routh 배열 :

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & d_1 & d_2 & & & \\
s^1 & e_1 & & & & \\
s^0 & f_1 & & & &
\end{array}
$$

시스템이 안정하기 위해서는 특성방정식의 계수 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots a_0$ 가 전부 같은 부호가 되어야 하고, 또한 완성된 Routh 배열에서 첫 번째 열의 계수 $a_n, a_{n-1}, b_1, c_1, \cdots f_1$ 등이 전부 같은 부호가 되어야 한다.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{N(s)}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}} \longrightarrow C(s)$$

Table 6.2
Completed Routh table

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

[예제 3.4] Routh 안정도 판별법을 이용하여 다음 특성방정식의 안정도를 조사하기로 한다

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 8s + 2 = 0$$

Routh 배열:

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 3 & 2 \\ s^3 & 2 & 8 & 0 \\ s^2 & -1 & 2 & 0 \\ s^1 & 12 & 0 & \\ s^0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Routh 배열의 첫 번째 열에서 부호의 변화가 두 번 있으므로, 특성방정식에서 두 개의 근이 양의 실수부를 갖게 되어 시스템은 불안정하다.

[예제 3.5] 다음 특성방정식의 안정도를 조사하기로 한다.

$$s^3 + 3s + 2 = 0$$

Routh 배열의 어떤 행의 첫 번째 요소가 0이 되면, 이 때 0을 매우 작은 양(+)의 수 ε으로 대치

Routh 배열:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 0 \approx \varepsilon & 2 \\ s^1 & 3 - \dfrac{2}{\varepsilon} & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Routh 배열의 첫 번째 열에서 부호의 변화가 두 번 있음
두 개의 극점이 양의 실수부를 가짐 => 불안정

[예제 3.6] 다음 특성방정식의 안정도를 조사하기로 한다.

$$s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

Routh 배열:

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & -2 & -7 & -4 \\ s^5 & 1 & -3 & -4 & \\ s^4 & 1 & -3 & -4 & \\ s^3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Routh 배열에서 s^3 행의 모든 요소가 0인 경우
그 행의 바로 위에 있는 다항식을 s로 미분한 다항식의 계수로 대치함.

$$P(s) = s^4 - 3s^2 - 4$$

$$\frac{dP}{ds} = 4s^3 - 6s$$

$dP(s)/ds$ 의 계수들을 s[3]행에 배열하여 새로운 Routh 배열을 만든다.

새로운 Routh 배열:

$$
\begin{array}{l|llll}
s^6 & 1 & -2 & -7 & -4 \\
s^5 & 1 & -3 & -4 & \\
s^4 & 1 & -3 & -4 & \\
s^3 & 4 & -6 & & \\
s^2 & -1.5 & -4 & & \\
s^1 & -16.7 & -4 & & \\
s^0 & -4 & & &
\end{array}
\qquad \leftarrow - - - - dP(s)/ds\text{의 계수 (}s^3\text{ 행)}
$$

새로운 Routh **배열의 첫 번째 열에서 부호의 변화가 한 번 있으므로 한 개의 극점이 양의 실수부를 갖게 되어 시스템은 불안정하다.**

[예제 3.7] 다음 특성방정식의 근의 실수부가 모두 −1보다 작은 근을 갖는지 조사하기로 한다. .

$$s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$$

Sol)

우선 특성방정식에서 s를 z−1로 대치

$$(z-1)^3 + 4(z-1)^2 + 6(z-1) + 4 = 0$$

$$\therefore z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Routh 배열:

$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 1 \\ z^2 & 1 & 1 \\ z^1 & \varepsilon & 0 \\ z^0 & 1 & 0 \end{array}$$

특성방정식의 근의 실수부가 모두 −1보다 작음

즉, 시스템의 시정수는 적어도 1보다 작다.

Ex. 6.6

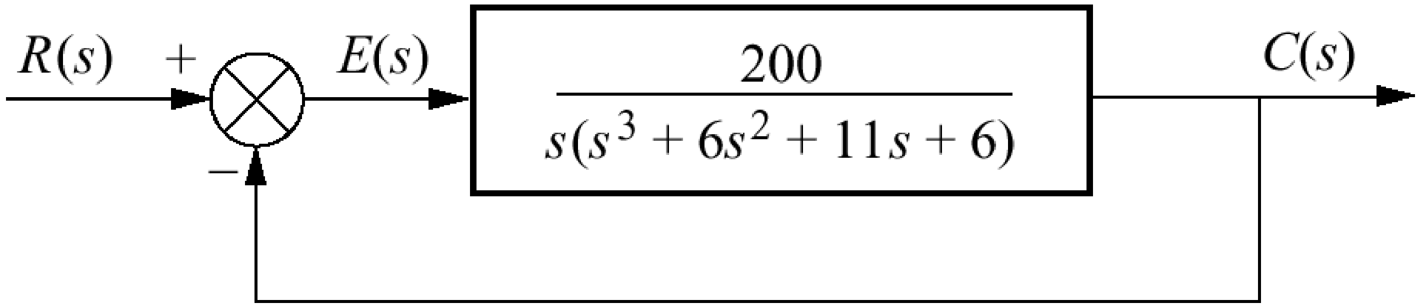


Figure 6.6 Feedback control system for Example 6.6

Routh table

s^4	1	11	200
s^3	$\cancel{6}\ \ 1$	$\cancel{6}\ \ 1$	
s^2	$\cancel{10}\ \ 1$	$\cancel{200}\ \ 20$	
s^1	-19		
s^0	20		

Ex. 6.7

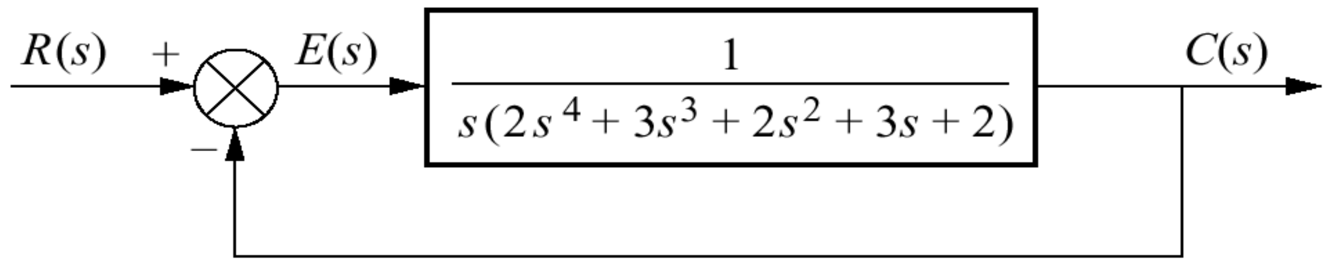


Figure 6.7 Feedback control system for Example 6.7

Routh table

s^5	2	2	2
s^4	3	3	1
s^3	$\cancel{0}$ ϵ	$\frac{4}{3}$	
s^2	$\frac{3\epsilon-4}{\epsilon}$	1	
s^1	$\frac{12\epsilon-16-3\epsilon^2}{9\epsilon-12}$		
s^0	1		

[예제 3.8] 다음 특성방정식에서 시스템이 안정하기 위한 파라미터의 범위를 선정하기로 한다.

$$s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4 = 0$$

Routh 배열:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K+2 \\ s^2 & 3K & 4 \\ s^1 & \dfrac{3K^2+6K-4}{3K} & \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

Routh 안정도 판별조건에 의하면 특성방정식의 계수가 같은 부호가 되어야 하므로 우선 K> 0이어야 하고 Routh 배열의 첫 번째 열이 같은 부호가 되어야 하므로

$$K > 0\,, \quad \frac{3K^2+6K-4}{3K} > 0$$

이어야 한다. 따라서 시스템이 안정하기 위해서는 K > 0.528 이어야 한다.

6.5 Stability in State Space

The eigenvalues of a matrix, A, are values of λ that permit aa nontrivial solution(other than 0) for x in the equation

$$Ax=\lambda x$$
$$(\lambda I-A)x=0$$

Solving for x yields,

$$x=(\lambda I-A)^{-1}0$$

or

$$x=\frac{adj(\lambda I-A)}{det(\lambda I-A)}0$$

We see that all solutions will be the null vector except for the occurrence of zero in the denominator. The $det(\lambda I-A)=0$ is the only case where a nonzero solution is possible.
The values of λ are calculated by forcing the denominator to zero.

$$det(\lambda I-A)=0$$

Ex. 6.11) Stability in State Space

Given the system

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ 2 & 8 & 1\\ -10 & -5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

find out how many poles are in the left half-plane, in the right half-plane, and on the jω-axis.

Sol) Find the $\boldsymbol{det}$(sI−A)

$$(\mathrm{sI-A})=\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ 2 & 8 & 1\\ -10 & -5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -3 & -1\\ -2 & s-8 & -1\\ 10 & 5 & s+2\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ det(\mathrm{sI-A})=s^3-6s^2-7s-52=0$$

Table 6.18
Routh table for Example 6.11

s^3	1	-7
s^2	$-\cancel{6}\ -3$	$-\cancel{52}\ -26$
s^1	$-\cancel{\frac{47}{3}}\ -1$	$\cancel{0}\ \ 0$
s^0	-26	

Since there is one sign change in the first column, the system has one right half-plan pole and two left-half plane poles

=> Unstable system

Home Work #6 (Due date: two weeks from today)

1. Solve Problem 19(19) on page 325(327) in the text book 7th ed. *(6th edition)

2. Solve Problem 31(31) on page 326(328) in the text book.

3. Solve Problems 42(42) on page 327(329) in the text book.

4. Solve Problem 56(55) on page 329(331) in the text book