[예제 4.6] $G(s)=\dfrac{K(s+3)}{s(s+2)}$인 시스템의 근궤적?

1. 폐루프 특성방정식의 근궤적을 위한 일반형태

$$1+K\frac{s+3}{s(s+2)}=0$$

2. 개루프 극점 및 영점 ?

3. 실수축상의 근궤적 ?

4. 분기점의 위치?

각 영역에서 K값의 최대 및 최소가 되는 s값

$$K=-\frac{s(s+2)}{s+3}$$

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{s(s+2)-(s+3)(2s+2)}{(s+3)^2}=0$$

으로부터 이탈점이 s = −1.268,
복귀점이 s = −4.732

5. 복소 극점의 궤적형태? $G(s)=\dfrac{K(s+3)}{s(s+2)}$

$$\angle G(s)=\angle(s+3)-\angle s-\angle(s+2)=180^\circ$$

위 식에 $s=\sigma+j\omega$ 를 대입하면

$$\angle(\sigma+j\omega+3)-\angle(\sigma+j\omega)-\angle(\sigma+j\omega+2)=180^\circ$$

혹은, $\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\sigma+3}-\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\sigma}=180^\circ+\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\sigma+2}$

위 식의 양변에 tangent를 취하고, 다음과 같은 관계식을 이용

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

이 때, $$\tan(\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma+3} - \tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma}) = \frac{\frac{\omega}{\sigma+3} - \frac{\omega}{\sigma}}{1 + \frac{\omega}{\sigma+3}\frac{\omega}{\sigma}} = \frac{-3\omega}{\sigma(\sigma+3)+\omega^2}$$

$$\tan(180° + \tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma+2}) = \frac{0 + \frac{\omega}{\sigma+2}}{1 - 0 \times \frac{\omega}{\sigma+2}} = \frac{\omega}{\sigma+2}$$

$$\therefore \frac{-3\omega}{\sigma(\sigma+3)+\omega^2} = \frac{\omega}{\sigma+2}$$ 혹은, $$(\sigma+3)^2 + \omega^2 = (\sqrt{3})^2$$

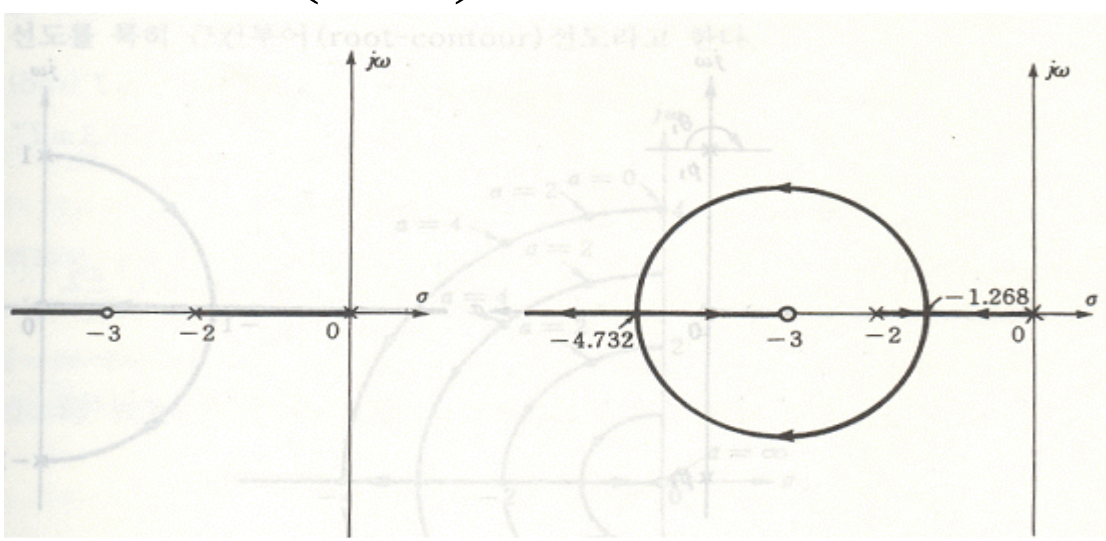


그림 **4.14**

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+2)}$$

의 근궤적선도

[예제 4.7] $G(s)=\dfrac{1}{s(s+K)}$ 인 시스템의 근궤적?

1. 폐루프 특성방정식을 근궤적을 위한 일반형태로 변환

$$1+K\frac{s}{s^2+1}=0$$

2. 개루프 극점 및 영점?
3. 실수축상의 근궤적은 $s\le 0$ 인 실수축에 존재한다.
4. 분기점 위치?

$K=-\dfrac{s^2+1}{s}$, $\dfrac{dK}{ds}=-\dfrac{(s^2+1)-s(2s)}{s^2}=0$ 으로부터

근궤적의 복귀점 $s=-1$

5. 복소 극점 p_1 에서의 출발각 θ_1 을 구한다

$$90^\circ-90^\circ-\theta_1=-180^\circ\ ,\ \theta_1=180^\circ$$

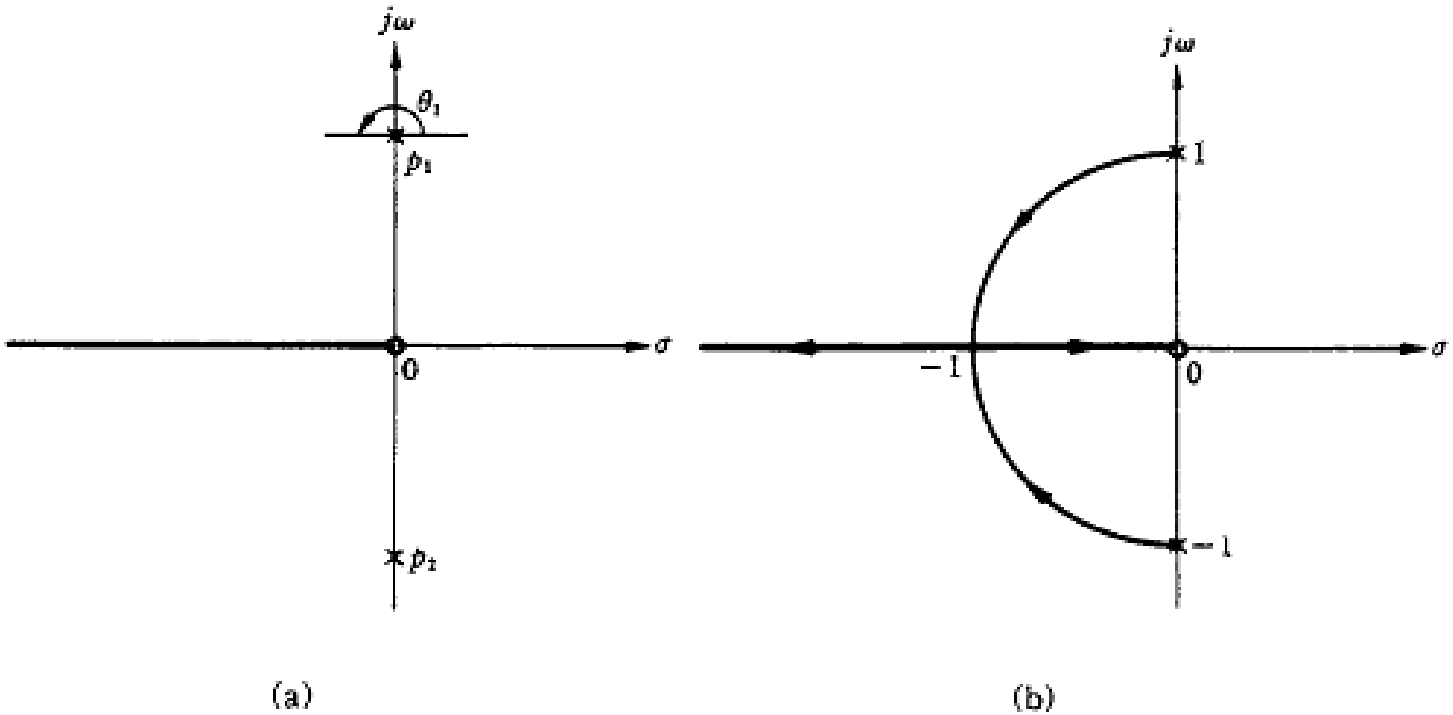


그림 4.16

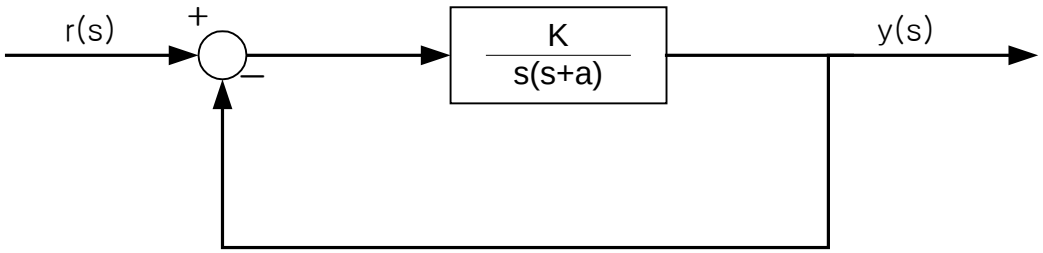
(a) 의 $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

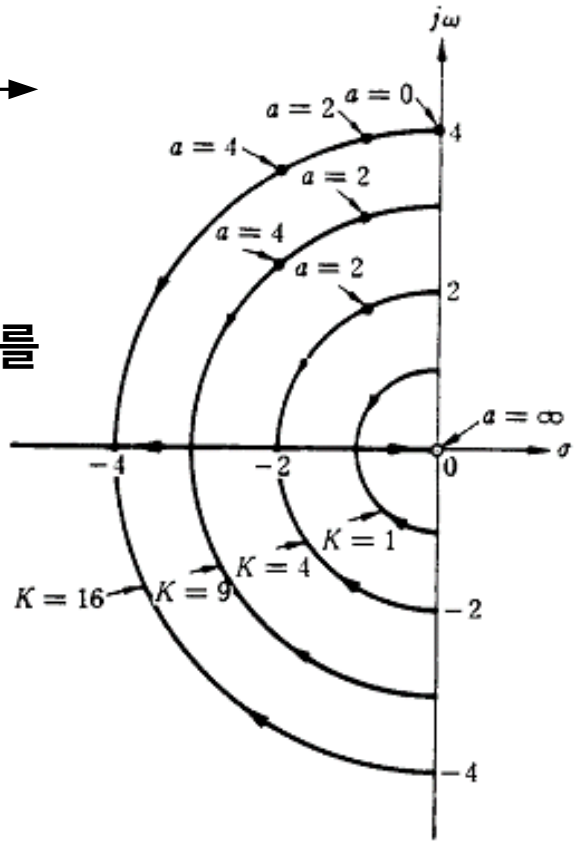
극점-영점 배치

(b) 의 $G(s) = \dfrac{1}{s(s+k)}$

극점-영점 배치

[예제 4.8] 다음 그림과 같이 두 개의 시스템 파라미터 a와 K를 포함하고 있는 폐루프 제어시스템에 대한 근궤적?





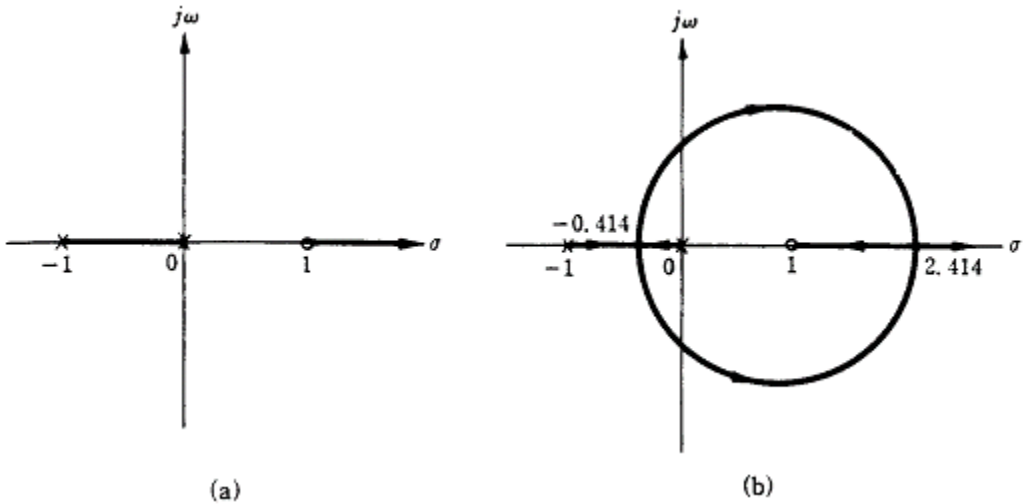
1) 한 파라미터는 고정, 나머지 한 개의 파라미터를 근궤적 파라미터로 하여 근궤적을 그림.
2) 고정했던 파라미터 값을 다른 값으로 고정한 후 반복 수행.

근궤적을 위한 일반형태로 표시한 특성방정식

$$1 + a\frac{s}{s^2 + K} = 0$$

시스템 파라미터 K = 1, 4, 9, 16일 때 시스템 파라미터 a값의 변화에 따른 근궤적선도인 근컨투어(root-contour)선도

[예제 4.10] 비최소위상 시스템 $G(s)=\dfrac{K(1-s)}{s(s+1)}$ 에 대한 근궤적?



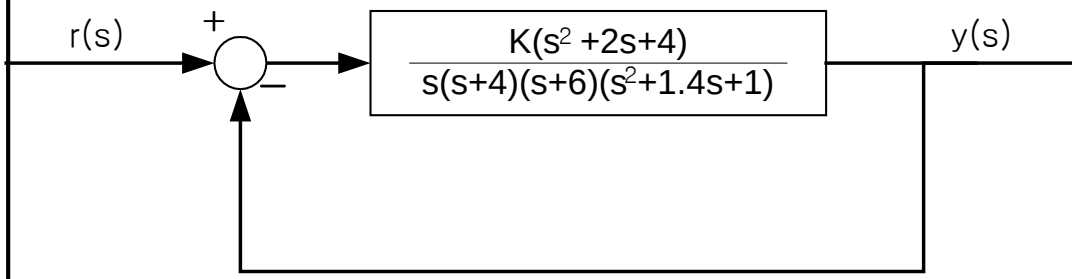
임의의 구간에서 우측에 있는 실수축상의 개루프 극점과 영점을 합한 개수가 짝수이어야 한다. 그리고 다음 식을 이용하여 s > 1, 그리고 −1 < s < 0 영역에 있는 두 개의 분기점을 구한다.

$$K=-\frac{s(s+1)}{1-s}$$

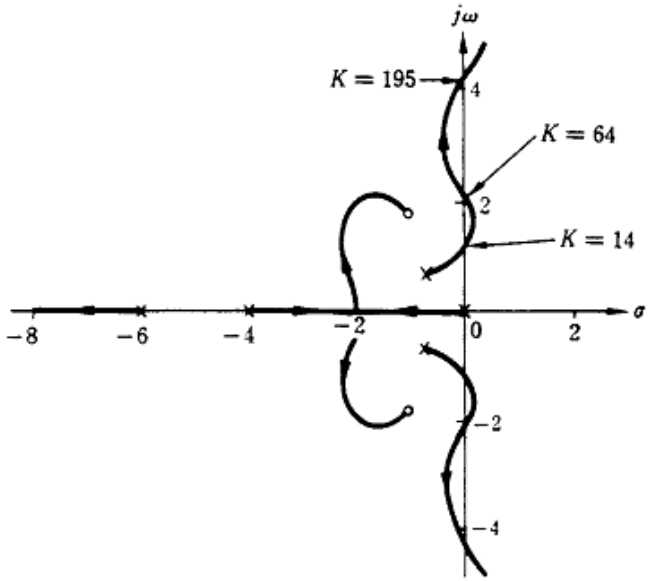
dK/ds=0 의 해로부터 근궤적의 분기점이 s = 2.414와 s = −0.414에 있음을 알 수 있다.

4.5 근궤적을 이용한 제어시스템 해석

[예제 4.11] 다음 폐루프 제어시스템에 대한 근궤적선도를 그리고 폐루프 제어시스템의 안정도를 평가하기로 한다.



< 폐루프 제어시스템 >



< 근궤적선도 >

제한된 범위의 K값인 0 < K < 14 그리고 64 < K < 195일 때만 안정.
이러한 시스템을 조건부 안정시스템(conditionally stable system).
제어시스템 설계시 조건부 안정시스템은 바람직하지 않다.

[예제 4.12] 그림 **4.24**에 표시된 근궤적을 보고 게인 **K**값에 따른 폐루프 시스템의 시간역 성능; 대표극점의 감쇠비 ζ , **2%** 정착시간 $\mathbf{t_s}$, 단위스텝입력에 대한 정상상태오차 $\mathbf{e_{ss}}$를 정성적으로 나타내기로 한다.

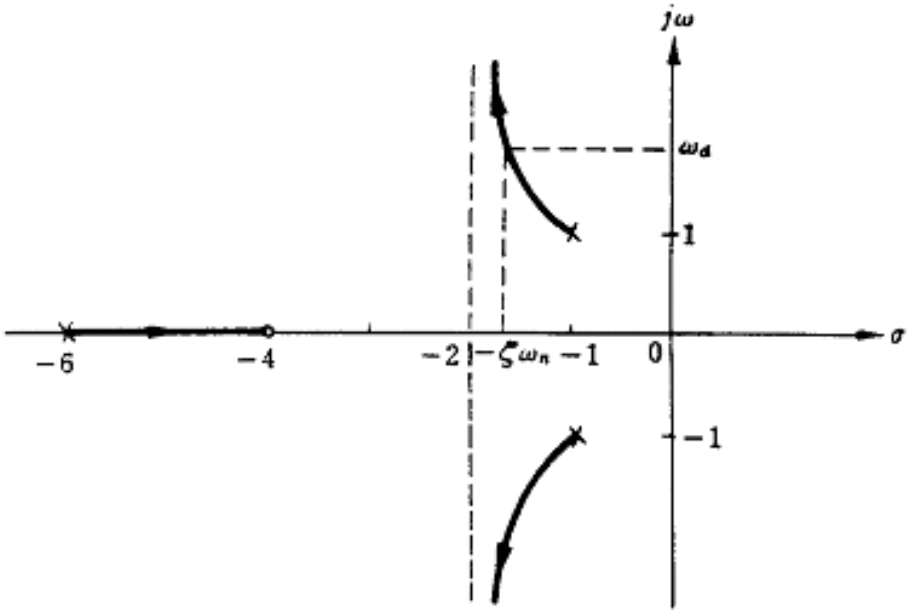


그림 4.24 근궤적선도

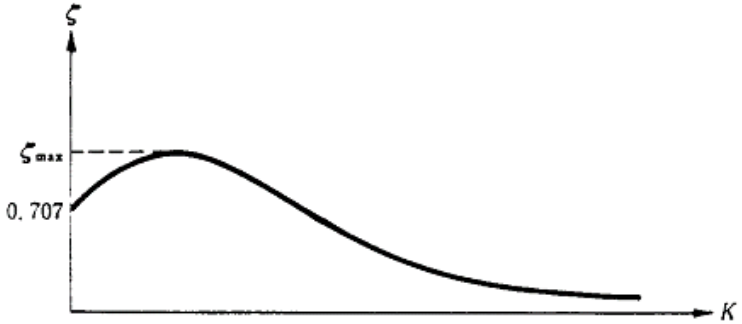
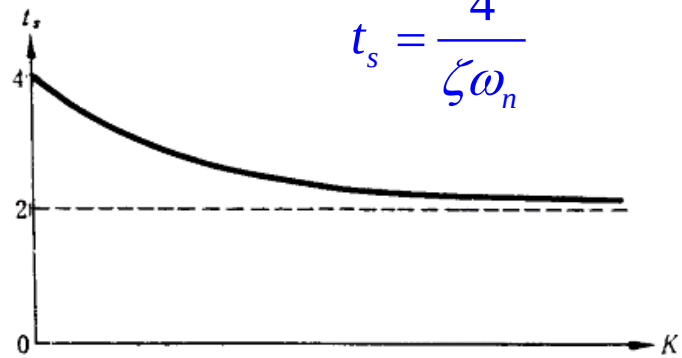
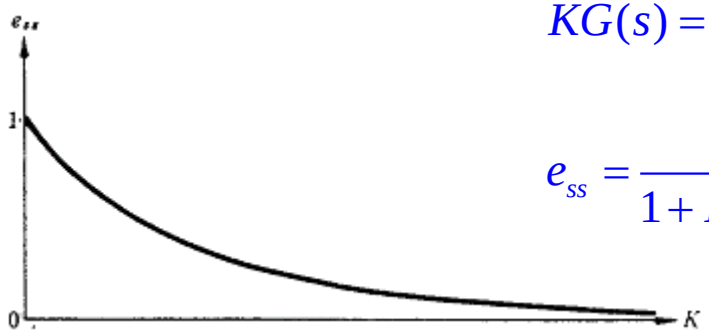


그림 4.25 게인 K값에 따른 감쇠비 ζ



$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

그림 4.26 게인 K값에 따른 정착시간 ts



$$KG(s) = \frac{K(s+4)}{(s+6)(s^2+2s+2)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+KG(0)} = \frac{1}{1+K/3}$$

그림 4.27 게인 K값에 따른 정상상태오차 e_{ss}

Ex. 8.8 Third order system gain design

Design the value of gain, K, to yield 1.52% overshoot. Also estimate the settling time, and steady-state error.

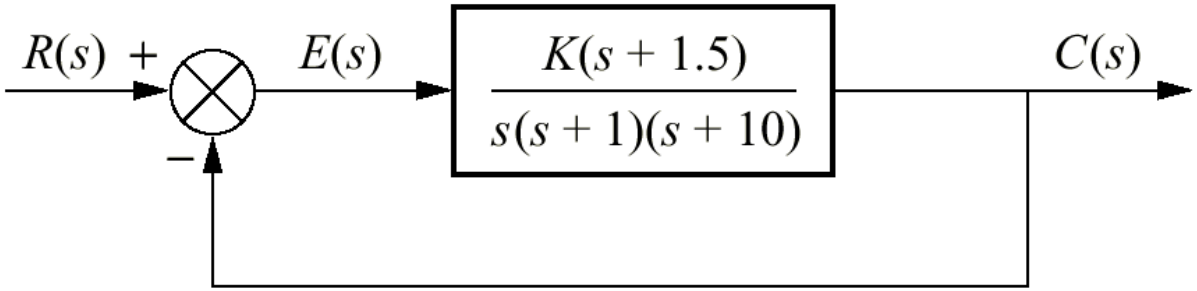


Figure 8.21 System for Example 8.8

Sol) Root locus:

1) Pole: 0, −1, −10
   Zero: −1.5

2) Break away point:
   from dK/ds=0 => −0.62(K=2.511) and −4.4(K=28.89)
   Break-in point:
   from dK/ds=0 => −2.8(K=27.91)

3) Asymptotes:

$$\alpha = \frac{(2K+1)180^\circ}{3-1} = \pm 90^\circ \qquad A_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = \frac{-11-(-1.5)}{3-1} = -4.75$$

$$\%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 1.52$$

A 1.52% overshoot corresponds to a damping ratio of 0.8

Three points satisfy this criterion: $-0.87 \pm j0.66,\ -1.19 \pm j0.66,\ -4.6 \pm j3.45$

$$\sin\theta = \zeta = 0.8$$

$$\therefore \sigma : \omega = 0.8 : 0.6 \Rightarrow \sigma + j\omega = \sigma + j0.75\sigma$$

The settling time and peak time:

$when\ \ K = 39.64,$ assumption of 2nd order

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{4.6} = 0.87\,\text{sec}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{3.45} = 0.91\,\text{sec}$$

Where $\zeta\omega_n$ and $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ are the real part of the closed loop, and imaginary part, respectively

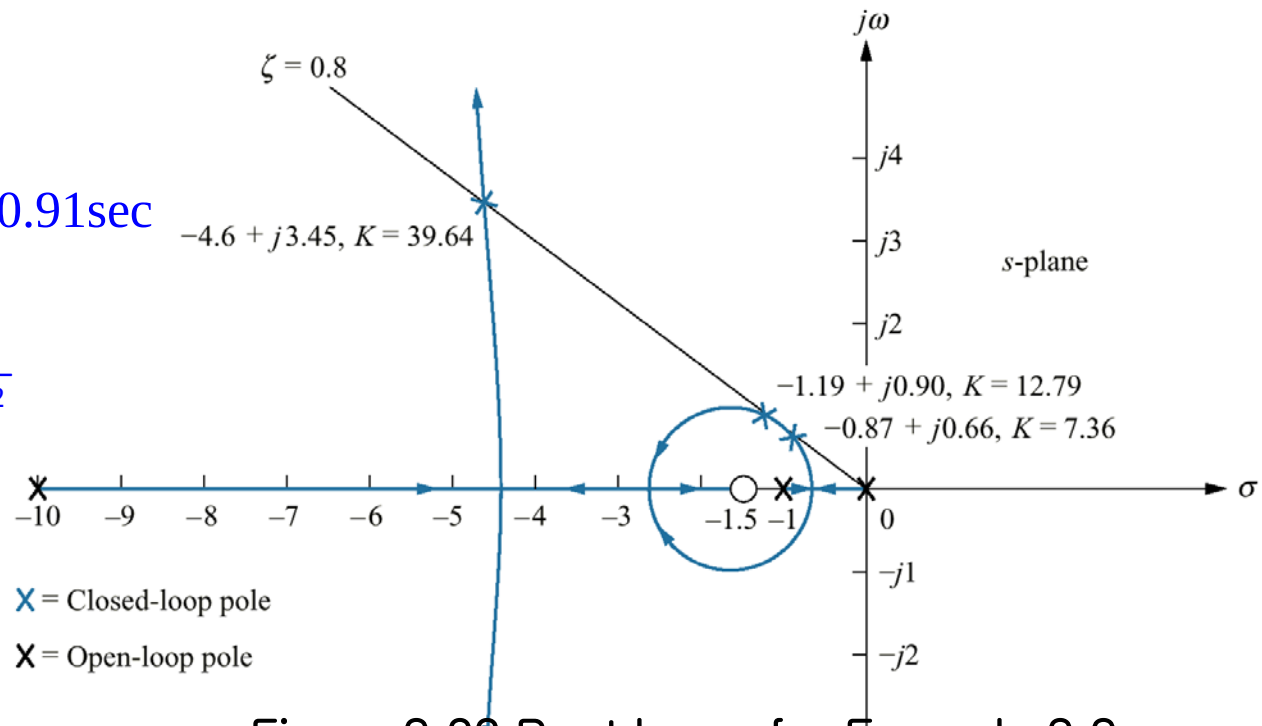


Figure 8.22 Root locus for Example 8.8

The steady state error about ramp input:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{(s+1.5)}{s(s+1)(s+10)} = \frac{K(1.5)}{(1)(10)}$$

$$e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{K_v}$$

```
>> num=[1 1.5];
>> den=[1 11 10 0];
>> rlocus(num, den)
>> sys=tf(num, den)
>> clsys=feedback(39.62*sys, 1);
>> step(clsys)
```

Table 8.4 Characteristics of the system of Example 8.8

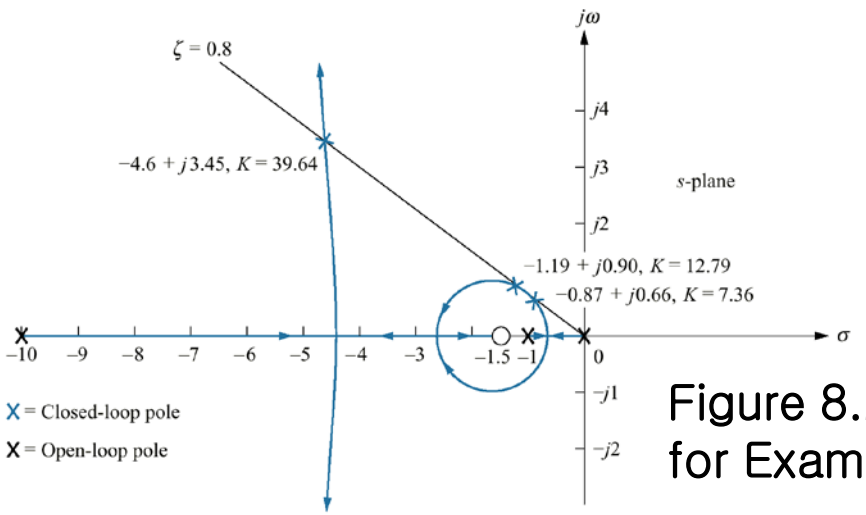
Case	Closed-loop poles	Closed-loop zero	Gain	Third closed-loop pole	Settling time	Peak time	K_v
1	$-0.87 \pm j0.66$	$-1.5 + j0$	7.36	-9.25	4.60	4.76	1.1
2	$-1.19 \pm j0.90$	$-1.5 + j0$	12.79	-8.61	3.36	3.49	1.9
3	$-4.60 \pm j3.45$	$-1.5 + j0$	39.64	-1.80	0.87	0.91	5.9

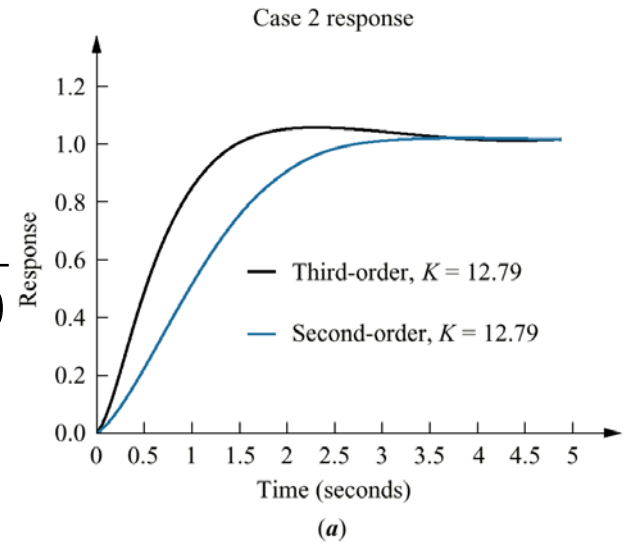
In case 3 from Table 8.4

$$G_3(s) = \frac{39.64(s+1.5)}{s(s+1.8)(s+4.6+j3.45)(s+4.6-j3.45)}$$

$$= \frac{39.64(s+1.5)}{s(s+1.8)(s^2+9.2s+33.06)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{0.3}{s(s+1.8)} + \frac{1.3(s+4.6)+1.6(3.45)}{(s+4.6)^2+3.45^2}$$





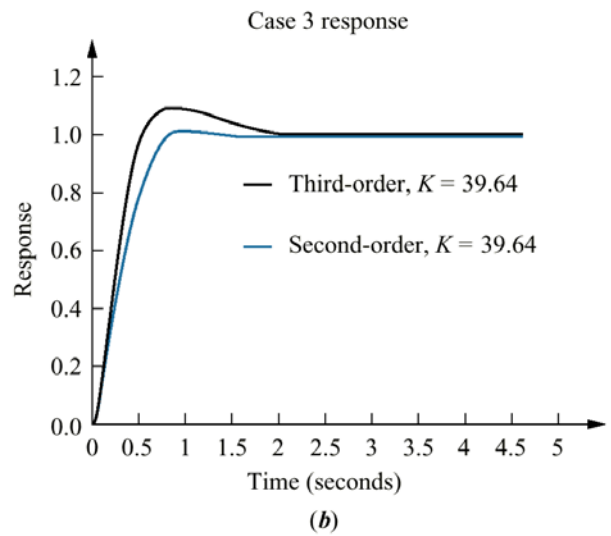


Figure 8.23 Second- and third-order responses for Example 8.8: a. Case 2; b. Case 3

4.6 근궤적을 이용한 비선형 시스템 해석

[예제 4.13] 구동기의 포화를 고려한 다음과 같은 비례 제어시스템에 대한 블록선도의 비선형 시스템에 대한 성능 및 안정도?

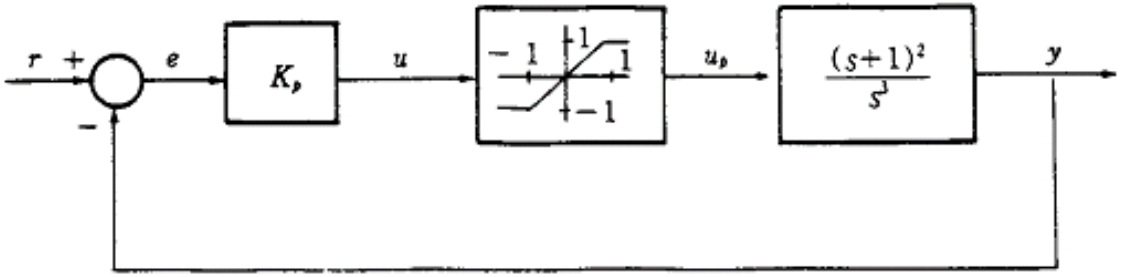


그림 4.28 구동기의 포화를 고려한 비례 제어시스템

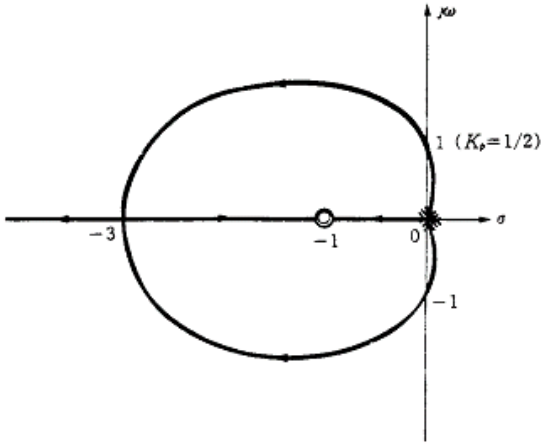


그림 4.29 구동기의 포화를 무시한 시스템에 대한 근궤적

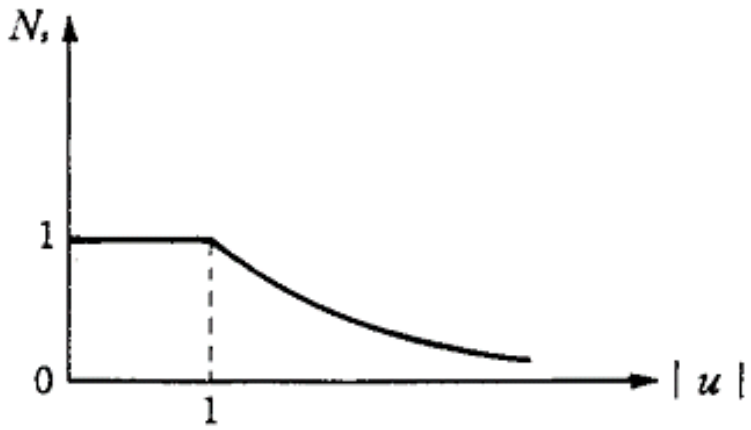


그림 4.30 구동기 포화에 대한 기술함수게인 N_s

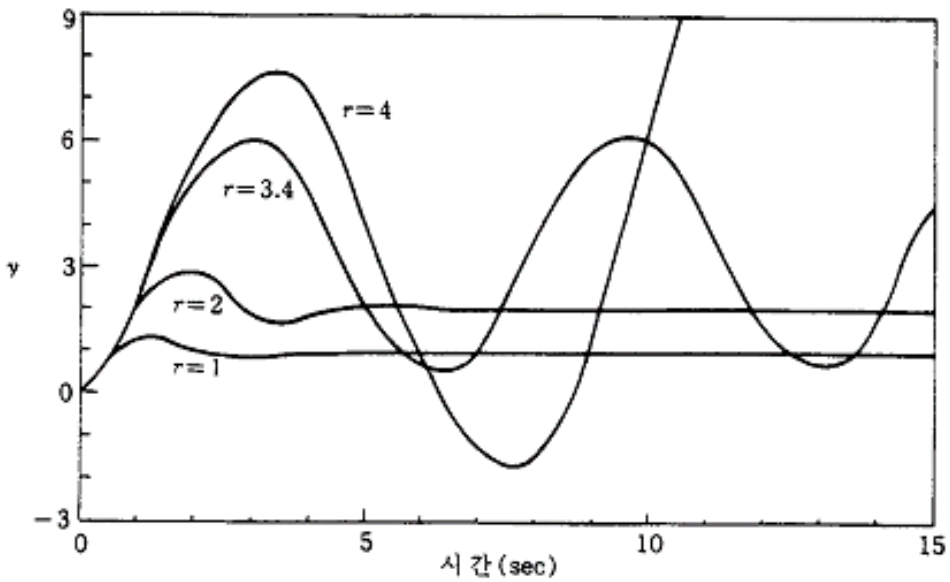


그림 4.31 그림 4.28에 표시된 비례 제어시스템의 스텝응답

4.7 MATLAB을 이용한 근궤적

▶ MATLAB을 이용하여 근궤적을 그릴 때

$$1+G(s)=1+K\frac{num}{den}=0$$

$$num=s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0$$

$$den=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

▶ 근궤적을 그리는 MATLAB 명령

$rlocus(num,den)$ 혹은 $rlocus(num,den,K)$

상태공간 모델식으로 표현된 시스템에서는

$rlocus(A,B,C,D)$ 혹은 $rlocus(A,B,C,D,K)$

K값에 따른 폐루프 근의 값들을 저장

$$[r, K] = rlocus(num, den)$$
$$[r, K] = rlocus(num, den, K)$$
$$[r, K] = rlocus(A, B, C, D)$$
$$[r, K] = rlocus(A, B, C, D, K)$$

근궤적을 MATLAB 화면에 나타내기 위해서는

$$plot(r, '\ ')$$

만일 근궤적상에 $'O'$ 나 $'X'$ 를 표시하고 싶다면

$plot(r, 'O')$ 혹은, $plot(r, 'X')$

MATLAB은 근궤적을 그릴 때 근궤적 파라미터 K의 크기를 자체적으로 적절히 조정하므로, 다음과 같이 시스템 게인만 다르게 주어진 전달함수의 근궤적선도들은 모두 같게 그려진다.

$$G_1(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$G_2(s) = \frac{10K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$G_3(s) = \frac{100K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

위에 주어진 전달함수 $G_1(s)$, $G_2(s)$ 그리고 $G_3(s)$의 분자 다항식(num) 및 분모 다항식(den)은 각각 아래와 같이 동일하게 표기한다.

$$num = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$den = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

[예제 4.14] MATLAB을 이용하여 그림 4.32의 제어시스템에 대한 근궤적선도를 그리기로 한다.

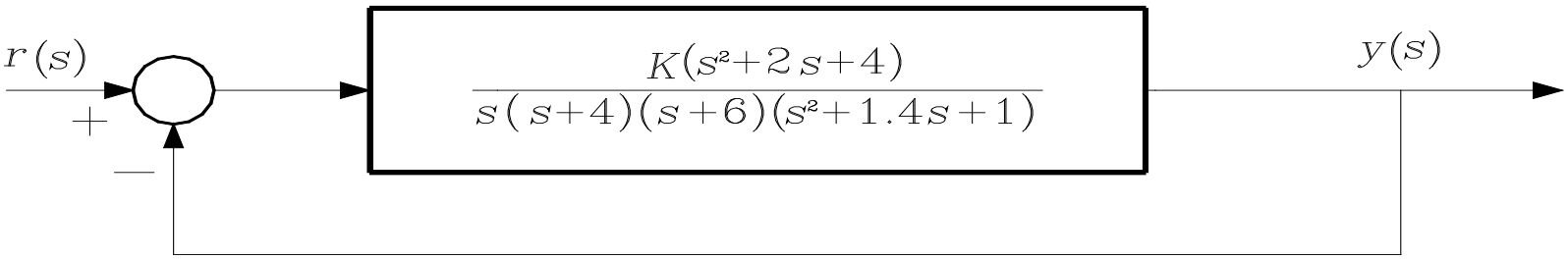


그림 4.32 폐루프 제어시스템

다항식의 곱셈은 convolution 명령을 사용하여 쉽게 구함.

$$a = s(s+4) = s^2 + 4s \quad : \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = s + 6 \quad : \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$c = s^2 + 1.4s + 1 \quad : \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = conv(a,b); \qquad den = conv(c,d)$$

개루프 영점은

$$p = [1 \quad 2 \quad 4]$$

$$r = roots(p)$$

개루프 복소공액극점 $(s^2 + 1.4s + 1 = 0$의 근$)$ 은 역시 'roots' 명령어를 사용

$$\text{개루프 영점}: s = -1 \pm j1.7321,$$

$$\text{개루프 극점}: s = -0.7 \pm j0.7141,\ s = 0,\ s = -4,\ s = -6$$

MATLAB 프로그램 4.1

```
% ****root-locus plot****
num = [1 2 4];
a = [1 4 0];
b = [1 6];
c = [1 1.4 1];
d = conv(a, b);
den = conv(c, d);
rlocus(num,den)
v = [-10 10 -10 10];axis(v)
grid
title('root-locus plot of G(s)=K(s^2+2s+4)/[s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)]')
```

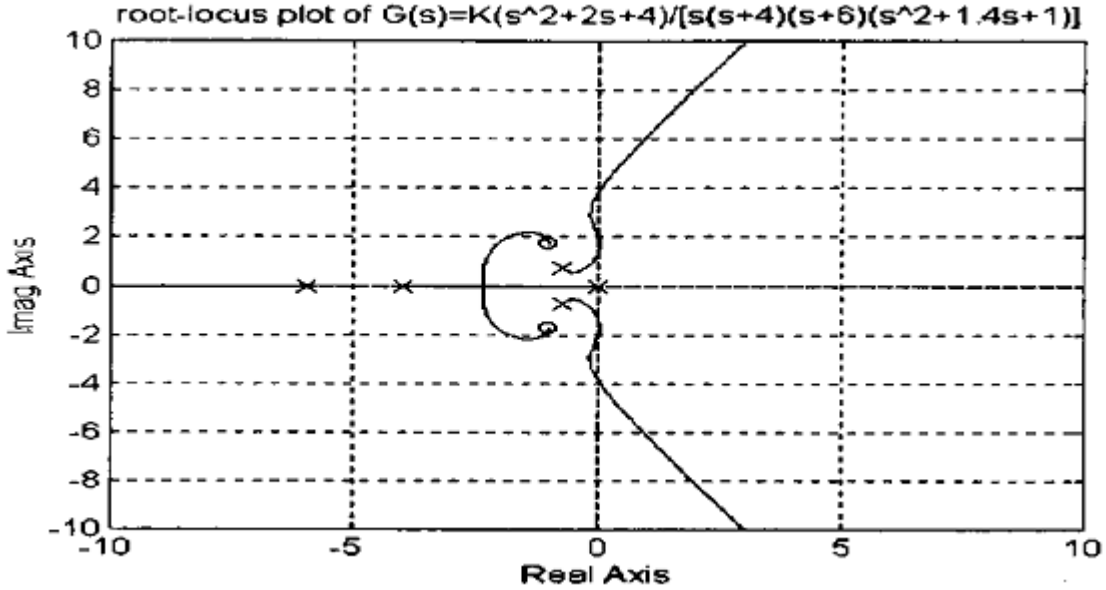


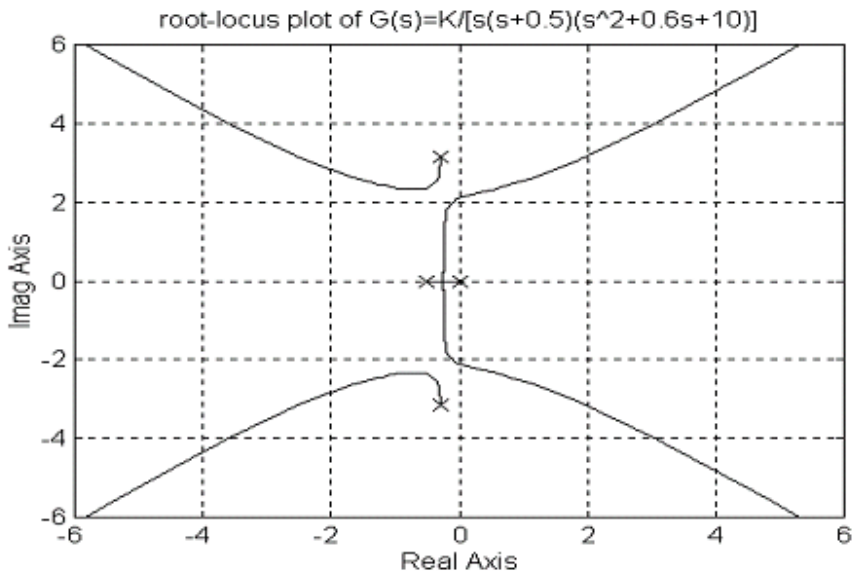
그림 4.33 $G(s)=\dfrac{K(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$ 의 근궤적선도

[예제 4.15] MATLAB을 이용하여 다음과 같은 개루프 전달함수 G(s)의 근궤적선도를 그리기로 한다. 그리고 근궤적의 분기점 $\zeta=1$, 폐루프 시스템의 감쇠비 $\zeta=0.707$, 근궤적이 허수축상에 있을 때 $\zeta=0$ 의 근궤적 파라미터 K값과 그 때의 s값?

$$G(s)=\frac{K}{s(s+0.5)(s^2+0.6s+10)}=\frac{K}{s^4+1.1s^3+10.3s^2+5s}$$

MATLAB 프로그램 4.2

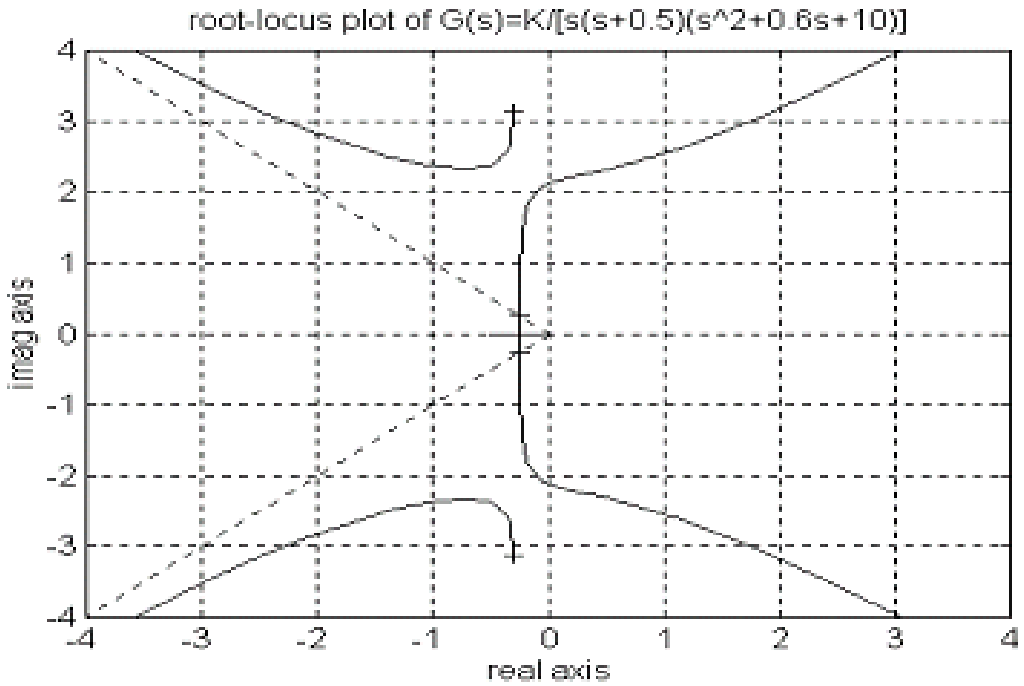
```
% ****root-locus plot****
num = [1];
den = [1 1.1 10.3 5 0];
rlocus(num,den)
grid
title('root-locus plot of G(s)=K/[s(s+0.5)(s^2+0.6s+10)]')
```



폐루프 제어시스템의 감쇠비 ζ 값에 따른 근궤적 파라미터 K값과 s 값을 알아야 할 경우

MATLAB 프로그램 4.4

```
num=[1];
den=[1 1.1 10.3 5 0];
K1=0:0.2:20;
K2=20:0.1:30;
K3=30:5:1000;
K=[K1 K2 K3] ;
r=rlocus(num,den);
plot(r,'-')
v=[-4 4 -4 4];axis(v)
grid
title('root-locus plot of G(s)=K/[s(s+0.5)(s^2+0.6s+10)]')
xlabel('real axis')
ylabel('imag axis')
hold on % 근궤적선도에 동일한 감쇠비ζ 선 추가
 i = 0:6;
plot( -0.707*i, i*sqrt( 1-0.707^2),':')
plot( -0.707*i, -i*sqrt( 1-0.707^2),':')
rlocfind( num, den )  % 지정 커서(cursor), 즉 '+'가 나타나게 한다.
```



만일 폐루프 극점의 위치를 정확히 알 수 있는 경우에는 ζ 선을 그릴 필요없이 'rlocfind' 명령만을 추가해서 원하는 위치에 '+' 커서를 놓고 지정해주면 그 점에서의 K값과 s값을 찾아낼 수 있다.

Home Work #8 (Due date: two weeks from today)

7th edition *(6th edition)

1. Solve Problem 5 *(5) on page 424(433) in the text book.
2. Solve Problem 10(10) on page 425(434) in the text book.
3. Solve Problem 12(12) on page 425(434) in the text book.
4. Solve Problem 13(13) on page 425(434) in the text book.
5. Solve Problem 20(20) on page 426(435) in the text book.
6. Solve Problem 26(26) on page 427(436) in the text book.