



일반적인 시스템에 대한 전달함수의 Bode 선도를 그리기 위한 $G(s)$ 의 일반형태

$$G(s) = K \frac{(1 + T_{z1}s)(1 + T_{z2}s) \cdots (1 + T_{zm}s)}{(1 + T_{p1}s)(1 + T_{p2}s) \cdots (1 + T_{pn}s)}$$

▶ Bode 선도를 신속하게 완성시키는 일반적인 절차

1. 각각의 기본 요소들에 대한 절점주파수 ω_c 를 계산
2. 절점주파수 ω_c 를 중심으로 점근선을 그린다.
3. 각각의 기본 요소에 대한 점근선의 대수적 합을 구하여 $M(\omega)$ 의 점근선을 그린다.
4. 각각의 절점주파수 ω_c 근처에서 실제 Bode 선도와 오차를 적절히 보정해 주고 나머지는 각각의 점근선에 가깝도록 선을 그린다.
5. 위상 $\phi(\omega)$ 도 역시 각각의 기본 요소에 대한 위상을 대수적 합으로 표시한다.



MATLAB, MATRIXx, 프로그램 CC 등과 같은 제어시스템 해석 및 설계를 위한 유용한 컴퓨터 소프트웨어를 이용

=> Bode 선도를 쉽게 그릴 수 있으나, 손으로도 Bode 선도를 그릴 수 있는 능력이 있어야 컴퓨터 결과에 대한 신뢰도를 가질 수 있다.



[예제 5.1] 다음 전달함수 $G(s)$ 에 대한 Bode 선도?

$$G(s) = \frac{5(1+0.1s)}{s(1+0.5s)(1+\frac{0.6}{50}s+\frac{1}{50^2}s^2)}$$

전달함수 $G(s)$ 의 게인 Bode 선도

1. 게인 요소: $K = 5$, $20 \log 5 = 14\text{dB}$
2. Break Frequency: $\omega = 2, 10, 50$
3. 1차 요소 ($\omega_c = 2$): 절점주파수 $\omega_c = 2$ 인 1차 요소는 절점주파수 이상의 범위에서 -20dB/dec 의 기울기
4. 1차 요소 ($\omega_c = 10$): $\omega_c = 10$ 인 1차 요소는 절점주파수 이상의 범위에서 20dB/dec
5. 2차 요소 ($\omega_c = 50$): $\omega_c = 50$ 인 2차 요소는 절점주파수 이상의 범위에서는 -40dB/dec



$$G(j\omega) = \frac{5(1+0.1j\omega)}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+\frac{0.6}{50}s+\frac{1}{50^2}(j\omega)^2)}$$

$$\omega \ll 2, \quad G(j\omega) \approx \frac{5}{j\omega} \Rightarrow M(\omega) = 20\log 5 - 20\log|j\omega|, \phi(\omega) = 0 - \tan^{-1} j\omega = -90^\circ$$

$$2 \ll \omega \ll 10, \quad G(j\omega) \approx \frac{5}{0.5(j\omega)^2} \Rightarrow M(\omega) = 20\log 10 + 20\log\left|\frac{1}{(j\omega)^2}\right| dB, \phi(\omega) = -180^\circ$$

$$10 \ll \omega \ll 50, \quad G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega} \Rightarrow M(\omega) = -20\log|j\omega| dB, \phi(\omega) = -90^\circ$$

$$50 \ll \omega, \quad G(j\omega) \approx \frac{5(0.1)j\omega}{0.5j\omega(j\omega/50)^2} = \frac{250}{(j\omega)^3} \Rightarrow M(\omega) = 20\log 250 - 60\log|j\omega| dB, \phi(\omega) = 0 - 3\tan^{-1}(j\omega/0) = -270^\circ$$

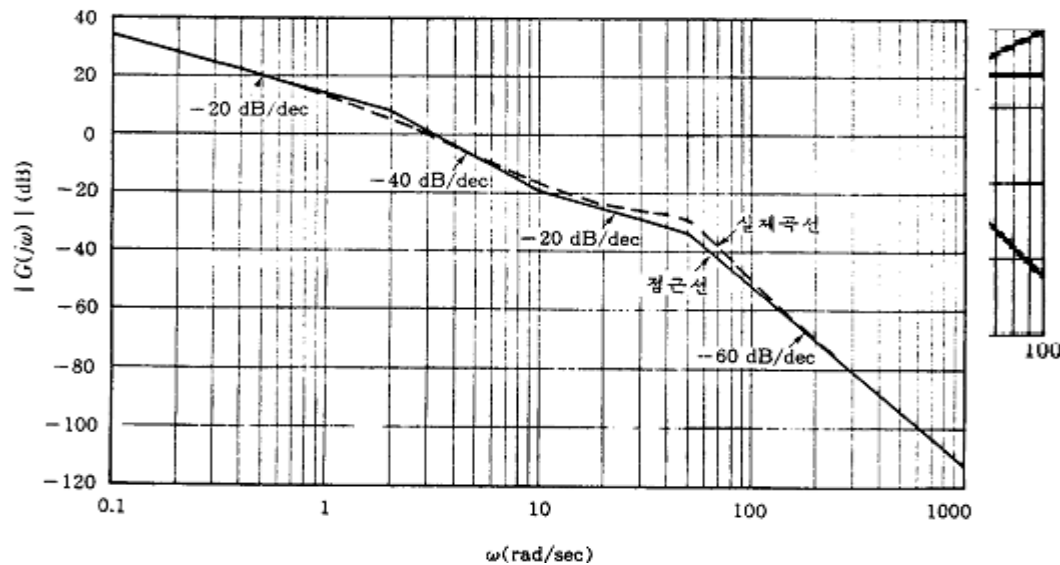


그림 5.8 $G(s) = \frac{s(1+0.1s)}{s(1+0.5s)(1+\frac{0.6}{50}s+\frac{1}{50^2}s^2)}$ 의 크기 Bode선도



전달함수 $G(s)$ 의 위상 Bode 선도

1. 게인 요소의 위상은 0° 로 일정하다.
2. 적분 요소의 위상은 -90° 로 일정하다.
3. 절점주파수 $\omega_c = 2$ 에서의 위상은 -45° 이다.
4. 절점주파수 $\omega_c = 10$ 에서의 위상은 $+45^\circ$ 이다.
5. 절점주파수 $\omega_c = 50$ 인 2차 요소에 대한 실제의 위상특성

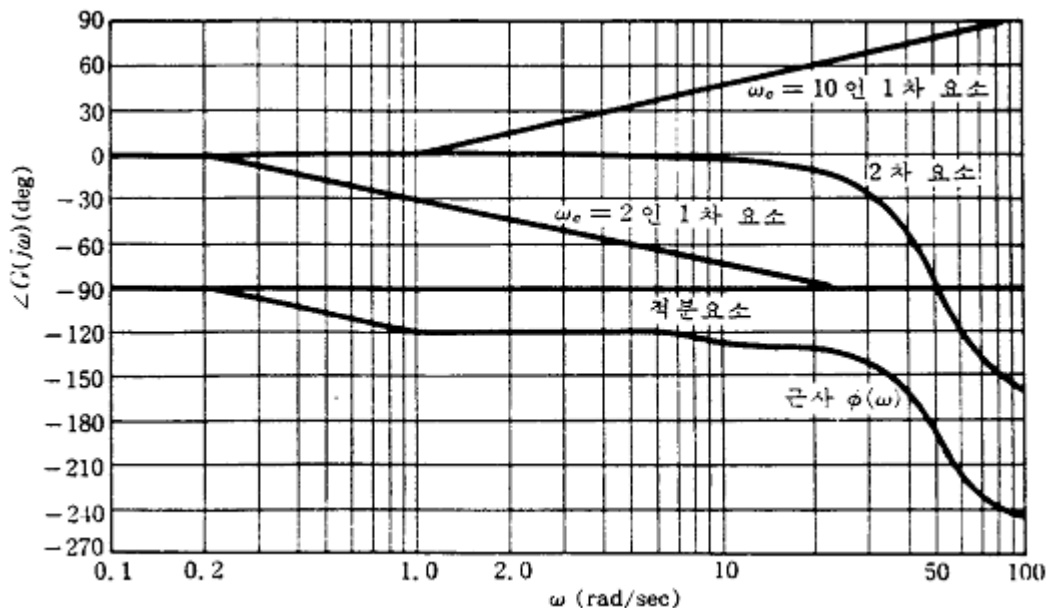


그림 5.9

$$G(s) = \frac{s(1 + 0.1s)}{s(1 + 0.5s)(1 + \frac{0.6}{50}s + \frac{1}{50^2}s^2)}$$

의 위상 Bode 선도



▶ 최소위상 시스템과 비최소위상 시스템의 주파수역 특성

1) 최소위상 시스템: 우반 s -평면에 극점이나 영점이 없는 위상지연이 최소로 되는 시스템.

$\omega \rightarrow \infty$ 일 때 크기는 $-20(n-m)$ dB/dec, $G(j\omega) \approx \frac{K}{(j\omega)^{n-m}}$
위상이 $-90^\circ(n-m)$ 이 된다.

2) 비최소위상 시스템: 우반 s -평면에 극점이나 영점이 있는 시스템으로 최소위상 시스템 경우의 위상지연보다 더 크게 발생한다.

$\omega \rightarrow \infty$ 일 때 크기는 $-20(n-m)$ dB/dec로
위상은 $-90^\circ(n-m)$ 보다 작게 된다.

$$G(j\omega) \approx \frac{-K}{(j\omega)^{n-m}} \quad \phi(\omega) = -180^\circ - 90^\circ(n-m)$$



예) 다음과 같은 두 개의 시스템에 대하여 고찰해 보기로 한다

$$G_1(s) = \frac{1+s/2}{1+s} \quad , \quad G_2(s) = \frac{1-s/2}{1+s}$$

두 시스템의 크기 특성은 같지만 위상 특성은 다르다.

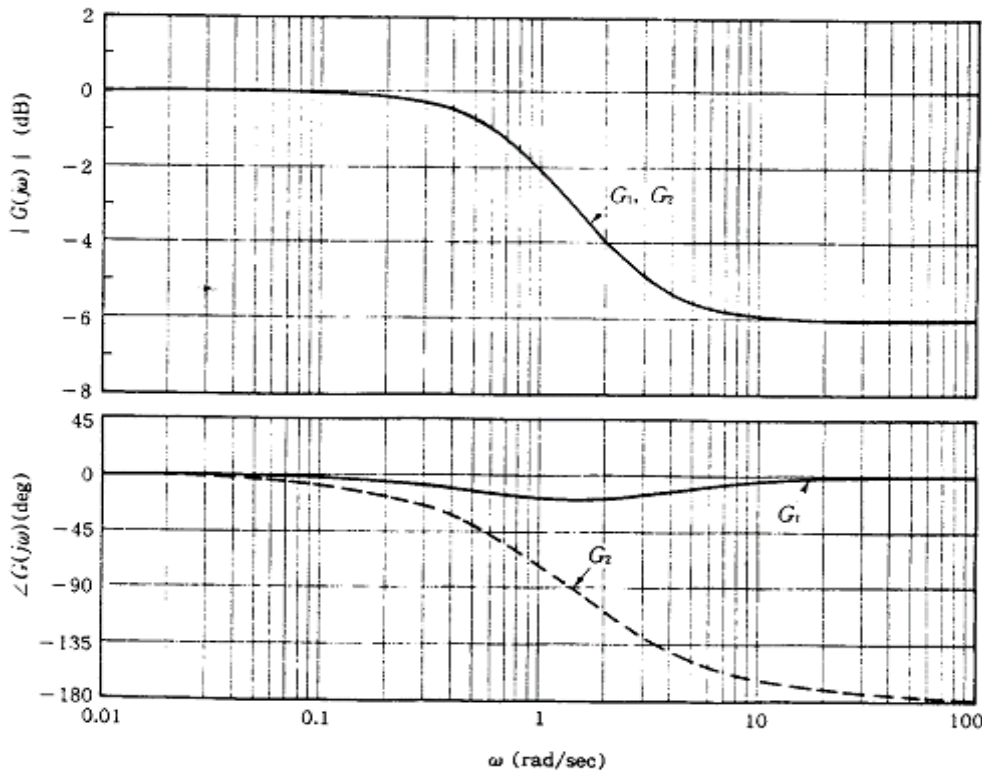


그림 5.10 최소위상 시스템 $G_1(s)$ 와 비최소위상 시스템 $G_2(s)$ 의 Bode 선도

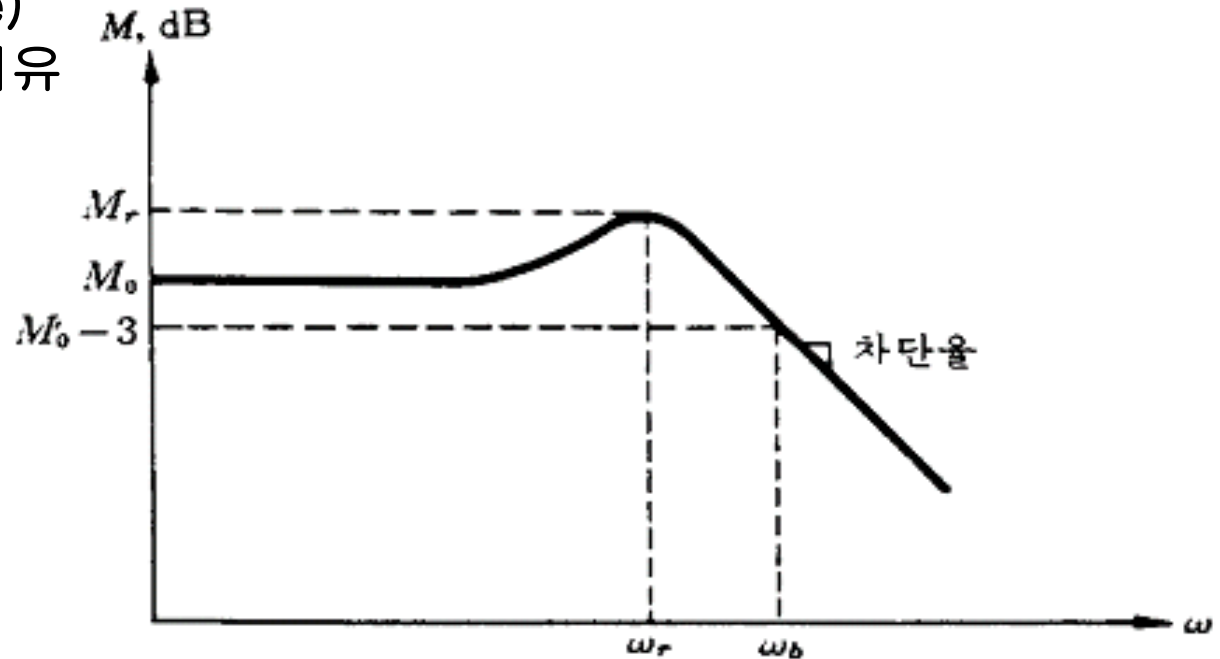


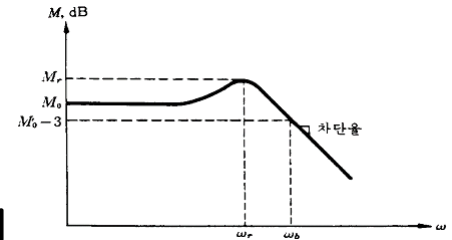
5.4 주파수응답 특성에 관한 사양

제어시스템의 주파수역 성능을 나타내기 위한 사양

==> 동적 시스템의 해석, 제어시스템의 설계사양으로 이용.

- 1) DC 게인(M_0)
- 2) 대역폭(bandwidth; ω_b)
- 3) 공진최대값(resonance peak value; M_r)
- 4) 공진주파수(resonance frequency; ω_r)
- 5) 차단율(cutoff rate)
- 6) 게인여유와 위상여유





- 1) **DC 게인**(M_0) : 주파수 ω 가 0일 때의 시스템 게인
단위스텝입력에 대한 정상상태응답의 크기는 DC 게인
- 2) **대역폭(bandwidth; ω_b)** : 주파수 전달함수의 크기가 $(20\log M_0 - 3)$ dB가 되는 주파수 까지($\omega=0$ 일 때의 출력의 크기의 0.707까지 감소하는 주파수)의 범위를 나타낸다.
대역폭이 넓으면 넓을수록 응답속도가 빠르다.
즉, 대역폭은 시간역에서의 시정수 T 의 역수와 같다. $1 + Ts = 0$ 에서,
Break frequency $\omega = \frac{1}{T}$
- 3) **공진최대값(resonance peak value; M_r)** : 시스템의 주파수응답 중 시스템 게인의 최대값으로 정의한다. M_r 이 커지면 오버슈트도 커지게 된다. 설계시에 주로 사용되는 M_r 은 1.1~1.5 이다.
- 4) **공진주파수(resonance frequency; ω_r)**
- 5) **차단율(cutoff rate)** : 시스템의 입력신호에서 잡음을 차단하는 제어 시스템의 특성을 나타내는 데 사용. 차단율이 클수록 잡음을 제거하는 성능은 좋아지지만, 큰 공진최대값을 동반하게 되어 시스템은 불안정해질 수 있다.
- 6) **시스템의 상대안정도를** 규정하는 **게인여유와 위상여유가** 있다.

➤ 상대안정도

특성방정식 $1 + KG(s) = 0$ 에서

$$|KG(s)| = 1$$

$$\angle KG(s) = (2k + 1)180^\circ$$

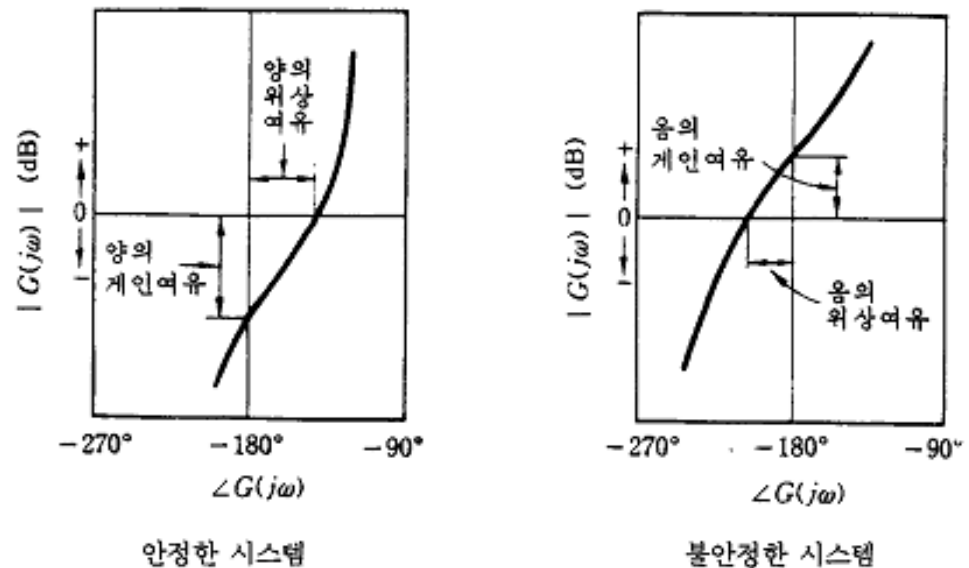
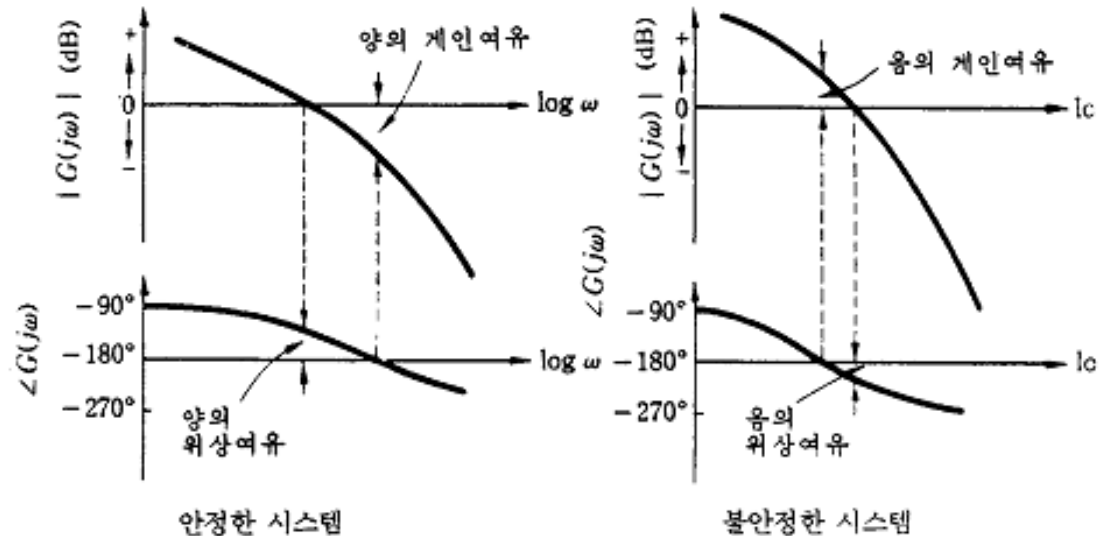
• 게인여유(Gain Margin)

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_p)|} \text{ 혹은, } K_g = -20 \log |G(j\omega_p)| \text{ dB}$$

• 위상여유(Phase Margin)

$$\gamma = \phi(\omega_g) - (-180^\circ)$$

그림 5.36 페루프 시스템이
안정한 경우와 불안정한
경우에 대한 주파수응답곡
선 형태





▶ 단순 2차 시스템의 주파수응답 특성의 해석적 고찰

일반적인 단순 2차 시스템에 대한 전달함수

$$G(s = j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

공진주파수: $|G(j\omega)|$ 가 최대값을 갖는 주파수

$|G(j\omega)|^2$ 의 역수를 $g(\omega)$ 로 표시하기로 한다. 즉,

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$g(\omega)$ 의 최소값을 구하기 위하여 $\frac{dg(\omega)}{d\omega} = 0$ 을 계산.

$$\frac{dg(\omega)}{d\omega} = 2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\left(-2\frac{\omega}{\omega_n^2}\right) + 8\zeta^2 \frac{\omega}{\omega_n^2} = 0$$

$$\therefore \frac{dg(\omega)}{d\omega} = -\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\zeta^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2) = 0$$



공진주파수 ω_r 은

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (0 \leq \zeta \leq 0.707) \quad (5.45)$$

공진최대값 M_r 은 공진주파수 ω_r 를 식 (5.33)에 대입하여

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (0 \leq \zeta \leq 0.707) \quad M(\omega_r) = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} \right|$$

또한 공진주파수에서의 위상(ω_r) 는

$$\phi(\omega_r) = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta}$$

$$= \left| \frac{1}{2\zeta^2 + j2\zeta \sqrt{1 - 2\zeta^2}} \right|$$

식 (5.45)는 $1 - 2\zeta^2 \geq 0$ 이 성립할 때만 의미를 갖기 때문에, $0 \leq \zeta \leq 0.707$ 일 때 공진현상이 발생하고 $\zeta > 0.707$ 일 때는 공진현상이 발생하지 않는다.

ζ 값이 0으로 접근하면 공진주파수 ω_r 은 시스템의 고유주파수 ω_n 과 같게 된다.



그리고 $0 \leq \zeta \leq 0.707$ 일 때 공진주파수 ω_r 은 감쇠고유주파수 $\omega_d (= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})$ 보다 작다는 것도 알 수 있다. 공진최대값 M_r 와 공진주파수에서의 위상 $\phi(\omega_r)$ 는 시스템의 감쇠비 ζ 만에 의해 결정된다.

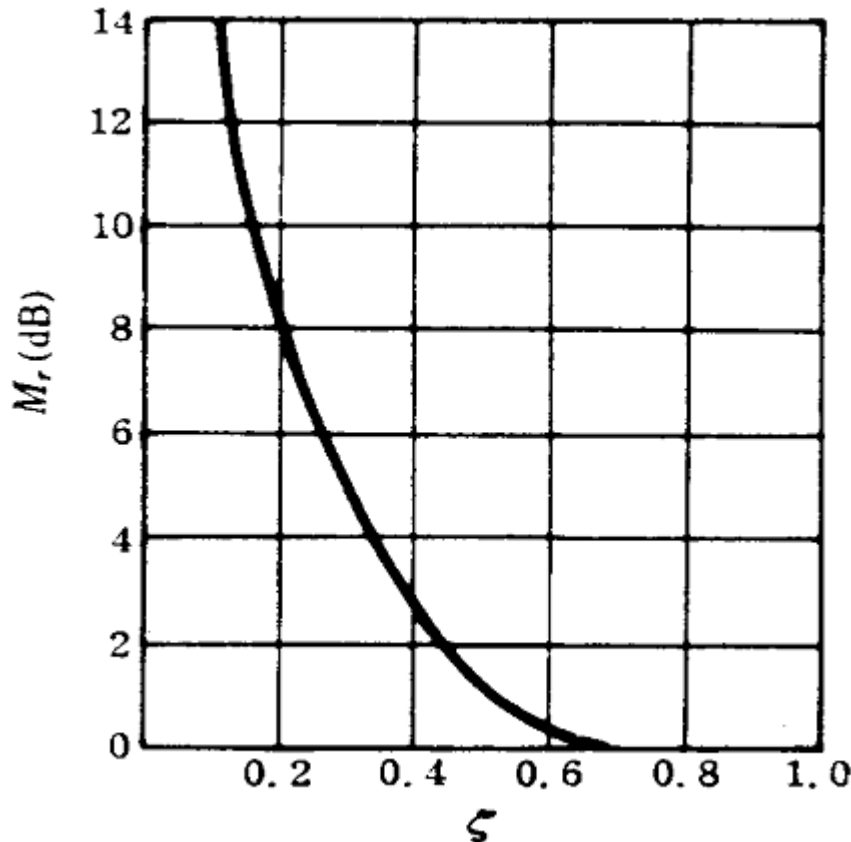


그림 5.12 감쇠비 ζ 값에 따른
공진최대값 M_r



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

▶ 단순 2차 시스템에서 대역폭 ω_b 를 계산

대역폭 ω_b 는 출력의 크기가 $\omega = 0$ 일 때의 출력의 크기의 **0.707** 되는 주파수로 정의되므로

$$\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2 = \frac{1}{0.707^2} = 1.414$$

혹은,

$$\omega_b = \omega_n \left\{ (1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right\}^{1/2}$$

고유주파수 ω_n 이 같은 시스템에서 감쇠비 ζ 값이 감소함에 따라 대역폭 ω_b 는 증가하게 되며, 대역폭은 일반적으로 2배 이내의 오차범위 내에서 근사적으로 시스템의 고유주파수와 같다. 특히, 감쇠비 $\zeta = 0.707$ 근처에서는 시스템의 고유주파수 ω_n 과 대역폭 ω_b 가 거의 일치한다.

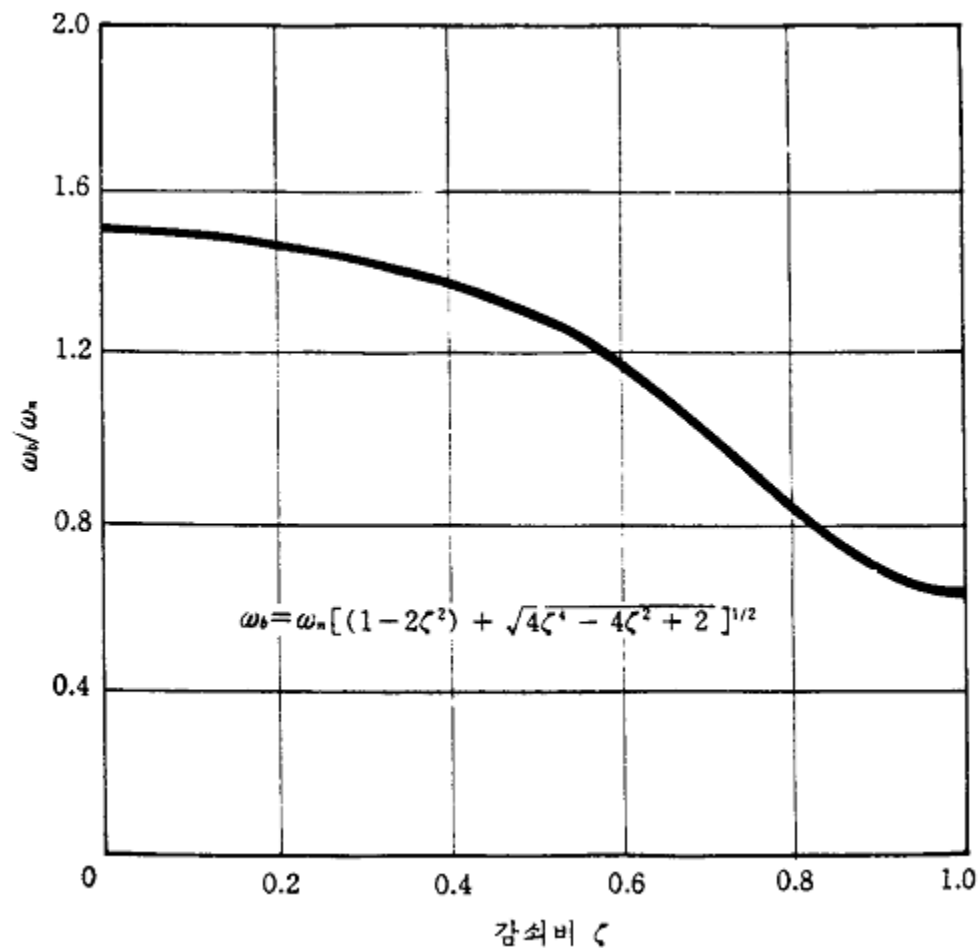


그림 5.13 감쇠비 ζ 값에 따른 대역폭 ω_b



5.9 MATLAB을 이용한 주파수응답 해석

[예제 5.5] MATLAB을 이용하여 다음 전달함수 $G(s)$ 에 대한 Bode 선도를 그리기로 한다.

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.233s + 1)}{s(s^2 + 1.8s + 9)}$$

MATLAB 프로그램 5.3

```
num = [9 2.1 9];  
den = [1 1.8 9 0];  
w = logspace(-2,3,100);  
bode(num,den,w)  
subplot(2,1,1);  
title('Bode diagram of  $G(s)=9(s^2+0.233s+1)/s(s^2+1.8s+9)$ ')
```

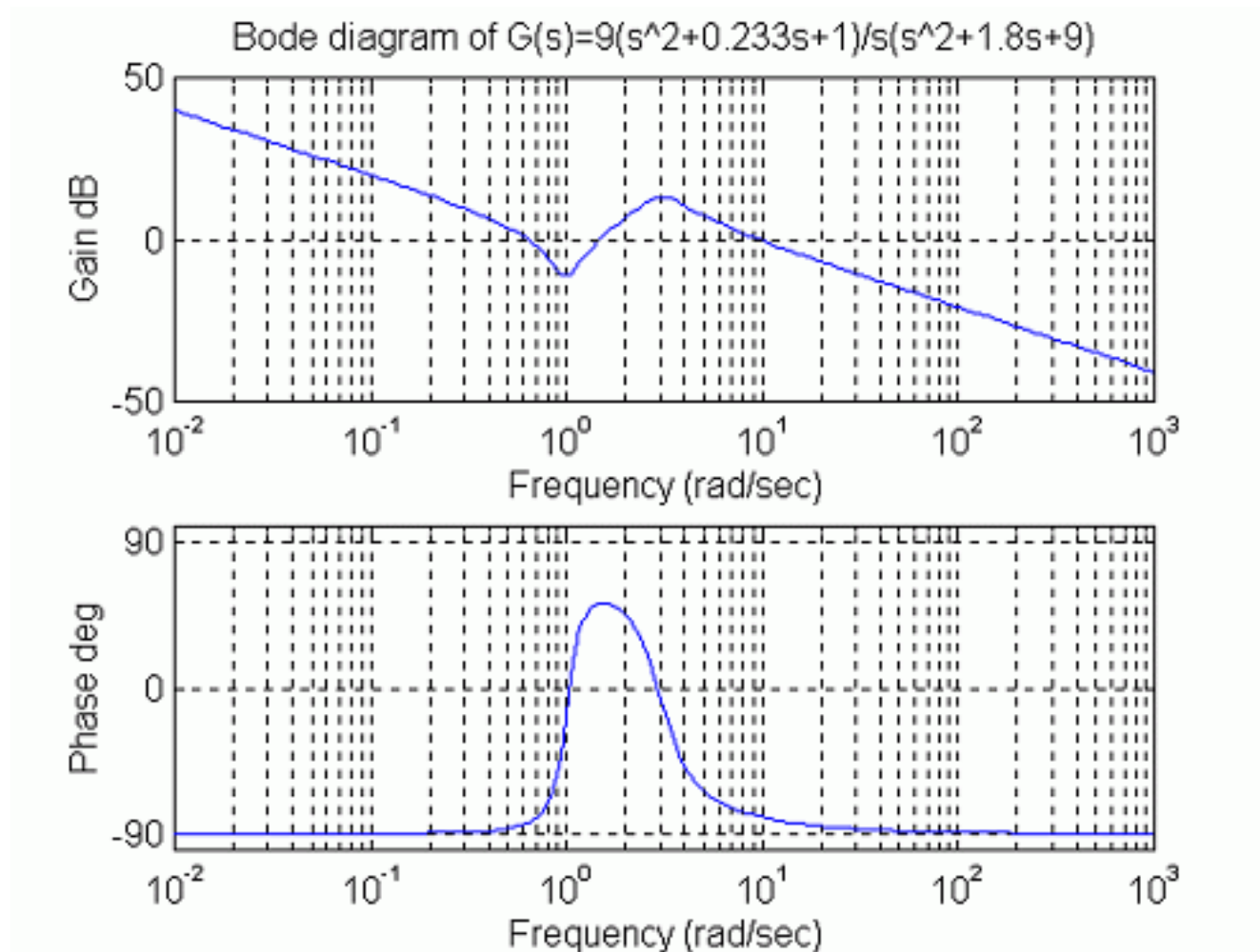


그림 5.44 $G(s)=\frac{9(s^2+0.233s+1)}{s(s^2+1.8s+9)}$ 의 Bode 선도



[예제 5.10] MATLAB을 이용하여 개루프 전달함수 $G(s)$ 에 대한 Bode 선도를 그리고 상대안정도 및 주파수역 성능을 평가하기로 한다

$$G(s) = \frac{0.5}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5}$$

MATLAB 프로그램 5.11

```
num=[0.5];  
den=[1 2 1 0.5];  
w=logspace(-1, 1, 200);  
margin(num, den)
```

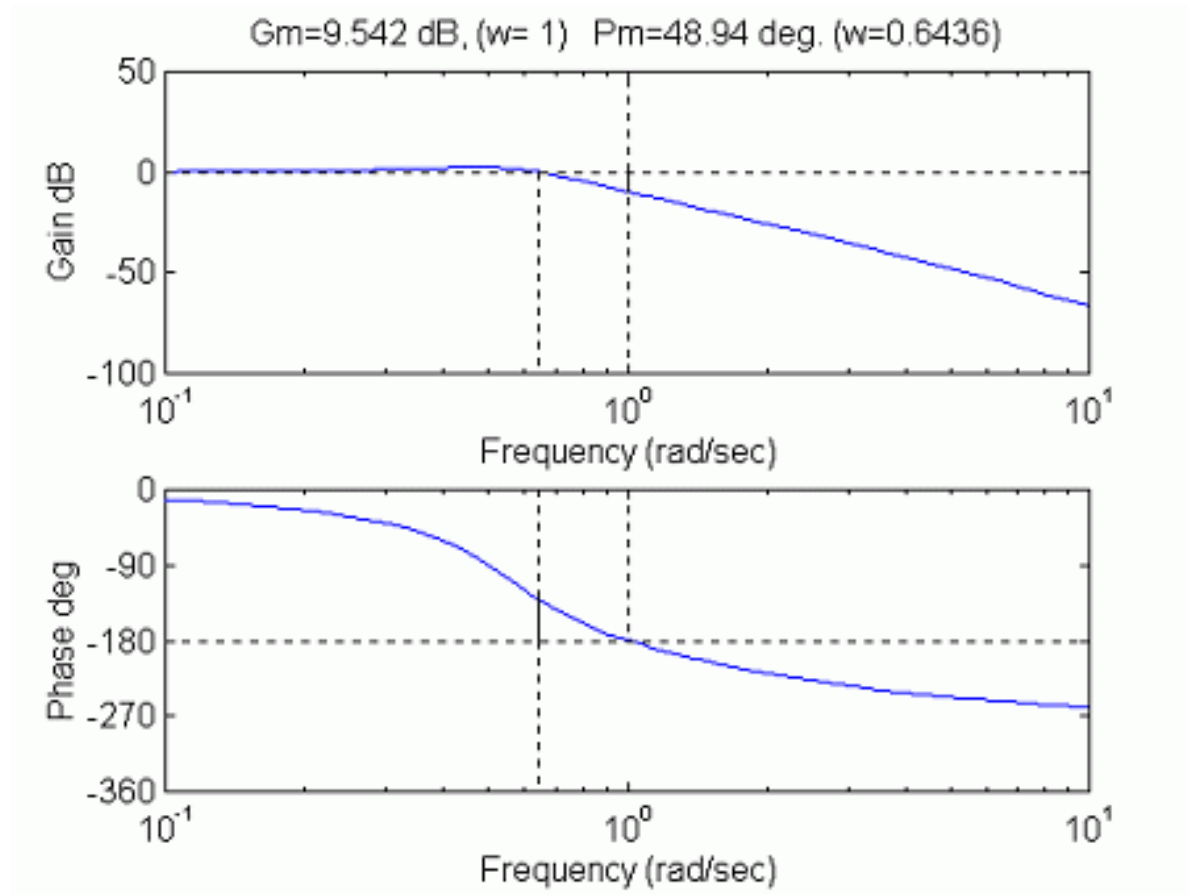


그림 5.52 $G(s) = \frac{0.5}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5}$ 의 Bode 선도



Home Work #9 (Due date: One week from today)

7th edition

1. Solve Problem 4 on page 598 in the text book.
2. Solve Problem 5 on page 598 in the text book.
3. Solve Problems 13 on page 600 in the text book.
4. Solve Problem 23 on page 601 in the text book.
5. Solve Problem 30 on page 603 in the text book.